Correction Exercice B Devoir

On nous donne l'action suivante

$$S = \int \sqrt{-g}\, d^3x\, (R - \frac{1}{12}H^2)\,, \tag{1}$$

où H est la dérivée extérieur d'une 2-form B ($H = \mathrm{d}B$). Nous allons d'abord faire apparaitre explicitement les dépendances en la métrique afin de prendre la variation de l'action par rapport à elle.

$$S = \int \sqrt{-g}\, d^3x\, (R - \frac{1}{12}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}H_{\mu\nu\rho}H_{\alpha\beta\gamma})\,. \tag{2}$$

En utilisant ces formules vues au cours

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \quad , \quad \delta R = R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\,, \tag{3}$$

on obtient la variation suivante de l'action par rapport à la métrique

$$\delta_g S = \int \sqrt{-g}\, d^3x\, \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - \frac{1}{12}H^2) + R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_\mu{}^{\alpha\beta}H_{\nu\alpha\beta}\right)\delta g^{\mu\nu}\,. \tag{4}$$

En demandant que cette variation minimise l'action, on obtient l'équation du mouvement suivante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(H_\mu{}^{\alpha\beta}H_{\nu\alpha\beta} - \frac{1}{6}H^2 g_{\mu\nu})\,. \tag{5}$$

Le membre de droite fait office de $T_{\mu\nu}$ pour cette théorie. On peut encore simplifier cette équation en prenant la trace afin de trouver la dépendance de la courbure scalaire en H^2

$$R = -\frac{1}{4}H^2\,. \tag{6}$$

L'équation du mouvement finale est donc

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(H_\mu{}^{\alpha\beta}H_{\nu\alpha\beta} - \frac{2}{3}H^2 g_{\mu\nu})\,. \tag{7}$$

On peut aussi varier l'action par rapport à B et obtenir l'équation suivante

$$\nabla_\mu H^\mu{}_{\nu\rho} = 0\,. \tag{8}$$

On considère maintenant une métrique de la forme

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\phi^2 \tag{9}$$

et un champ $B = h(r)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\phi$. En supposant que $f(r)$ est non-nulle, (7) et (8) nous donnent deux équations linéairement indépendantes :

$$f'(r) + \frac{1}{2r}h'(r)^2 = 0 \tag{10}$$

$$h''(r) - \frac{1}{r}h'(r) = 0 \tag{11}$$

où $'$ marque une dérivée selon r. La solution générale à la seconde équation est

$$h(r) = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2 \, , \tag{12}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégrations. On peut maintenant déduire $f(r)$

$$f(r) = -\frac{1}{4} C_1^2 r^2 + C_3 \, . \tag{13}$$

On peut enfin calculer la courbure scalaire de ce modèle :

$$R = \frac{3}{2} C_1^2 \, . \tag{14}$$

Dans le vide, les équations de la relativité générale en présence d'une constante cosmologique sont

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu} + \Lambda \, g_{\mu\nu} = 0 \, . \tag{15}$$

En contractant avec $g^{\mu\nu}$ dans un espace à 2+1 dimensions, on obtient

$$R = 6\Lambda \, . \tag{16}$$

En présence d'une constante cosmologique, la courbure scalaire est non-nulle mais reste constante. Dans notre modèle nous obtenons aussi une courbure scalaire constante. On peut donc l'associer à une constante cosmologique effective

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{C_1^2}{4} > 0 \, . \tag{17}$$

Cette dernière étant positive, notre solution est de type de-Sitter.